Funções diferenciáveis:

1) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f não é contínua em $(0,0)$

$\Rightarrow$ f não é dif. em $(0,0)$.

f é dif. em $(x,y) \neq (0,0)$.

quociente de um produto por uma soma de produtos de f. diferenciáveis.

2) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercício:

f não é dif. em $(0,0)$.

f é dif. em $(x,y) \neq (0,0)$.

— // —

Regra de cadeia: $(m=1)$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad \boxed{h = f\circ g}$$

$$x \longmapsto g(x) \longmapsto f(g(x))$$

$$g(x) = \left(u_1(x), u_2(x), \dots, u_p(x)\right)$$

$$\underset{1\times n}{D(f\circ g)(x)} = \underset{1\times p}{Df(g(x))}\ \underset{p\times n}{Dg(x)}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \dfrac{\partial h}{\partial x_j} & \cdots \end{bmatrix}_{j=1,\dots,n} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{1\times p} \begin{array}{c} \quad j \quad \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial u_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(u_1(x), u_2(x), \dots u_j(x), \dots, u_p(x))$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_p}\frac{\partial u_p}{\partial x_j}}$$

Notação: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, escalar

$$\underset{1\times n}{Df(x)} \equiv \nabla f(x) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Derivada de f $\equiv$ Gradiente de f

$\nabla \equiv$ nabla

$\boxed{\text{matriz}}$ $\boxed{\text{Vector}}$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right] = Df(x)$$

$$|||$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = \nabla f(x)$$

<u>Ex:</u> $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$

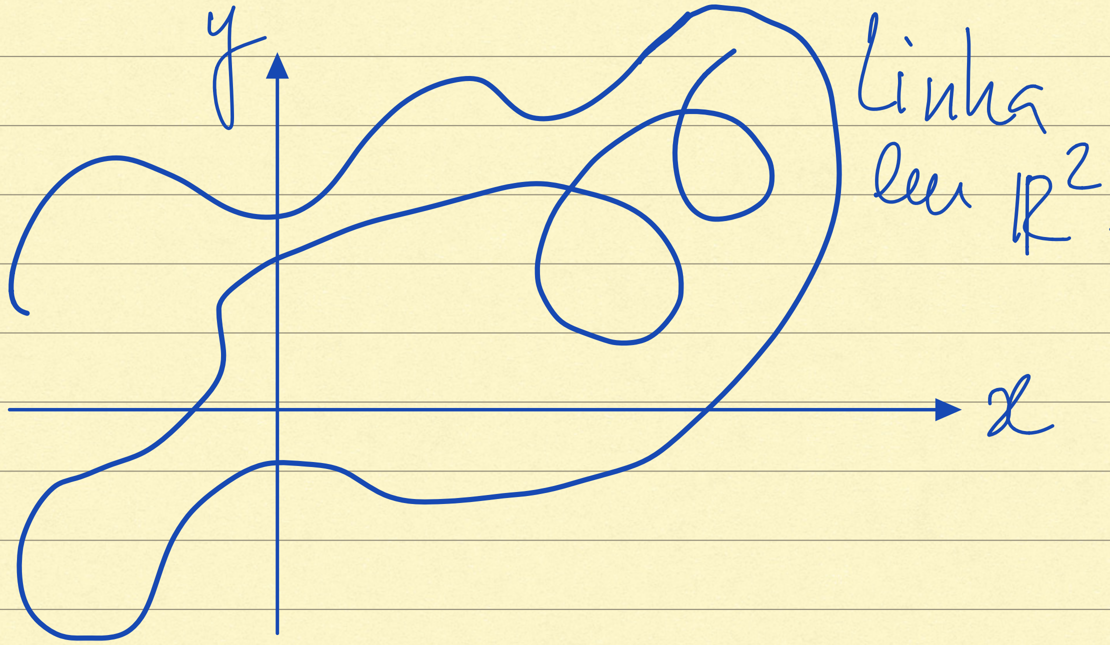
$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x,y,z) = (1, 2, 3).$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ dif.}$$

—— // ——

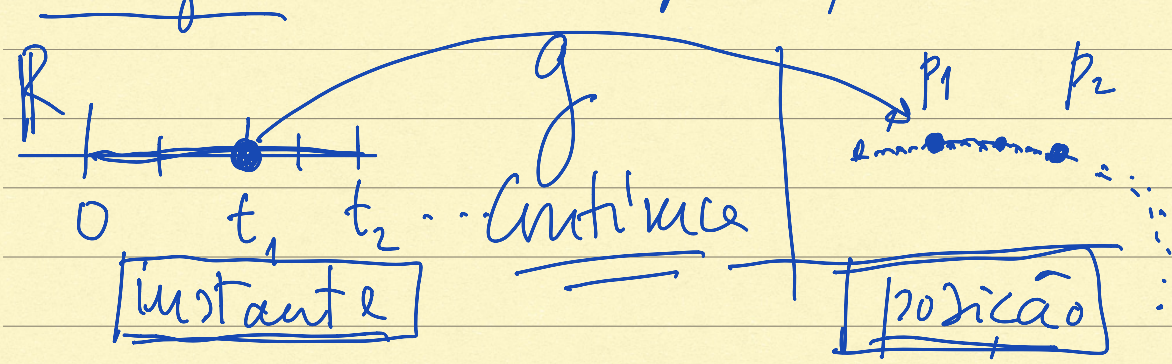
Linhas em $\mathbb{R}^n$



Experiência conceptual:

partícula em movimento no espaço:

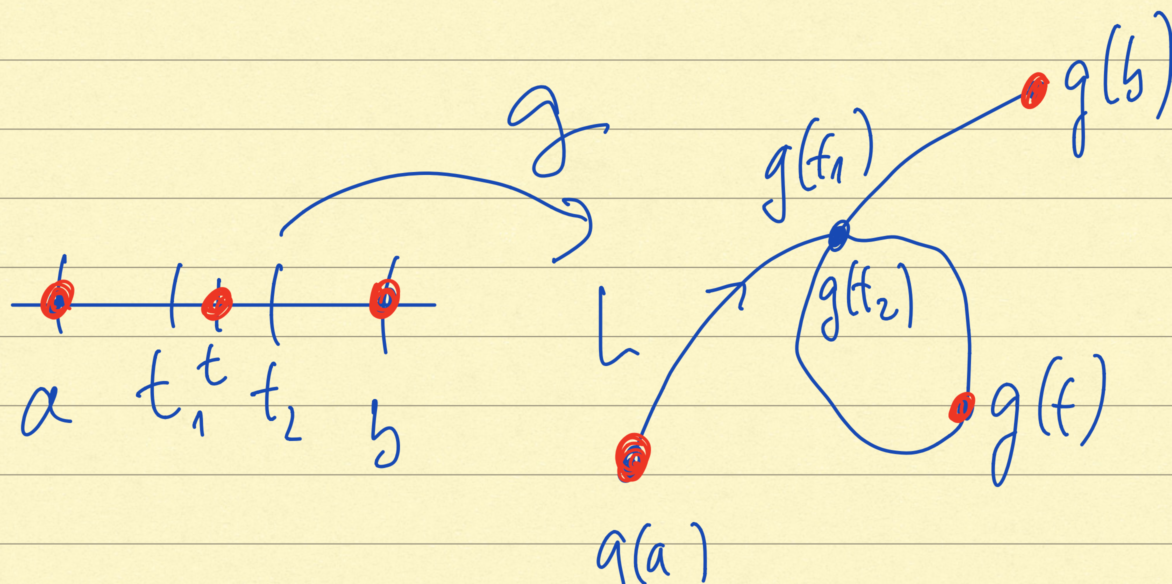
relógio: t (tempo, instante)



<u>Definição</u>: linha em $\mathbb{R}^n$ é a $\boxed{\text{imagem}}$ de uma <u>função contínua</u> de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$.

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \underline{\text{contínua}}$$
$$t \longmapsto g(t)$$

instante — posição



– Se g for injectiva, diz-se que L é <u>simples</u>.

Ex: $g(t) = (R\cos t,\ R\,\text{sen}\,t)$

$t \in [0, 2\pi]$.

$g(t) = (x(t), y(t))$

$x(t) = R\cos t$
$y(t) = R\,\text{sen}\,t$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$

Circunferência de raio R e centro em $(0,0)$

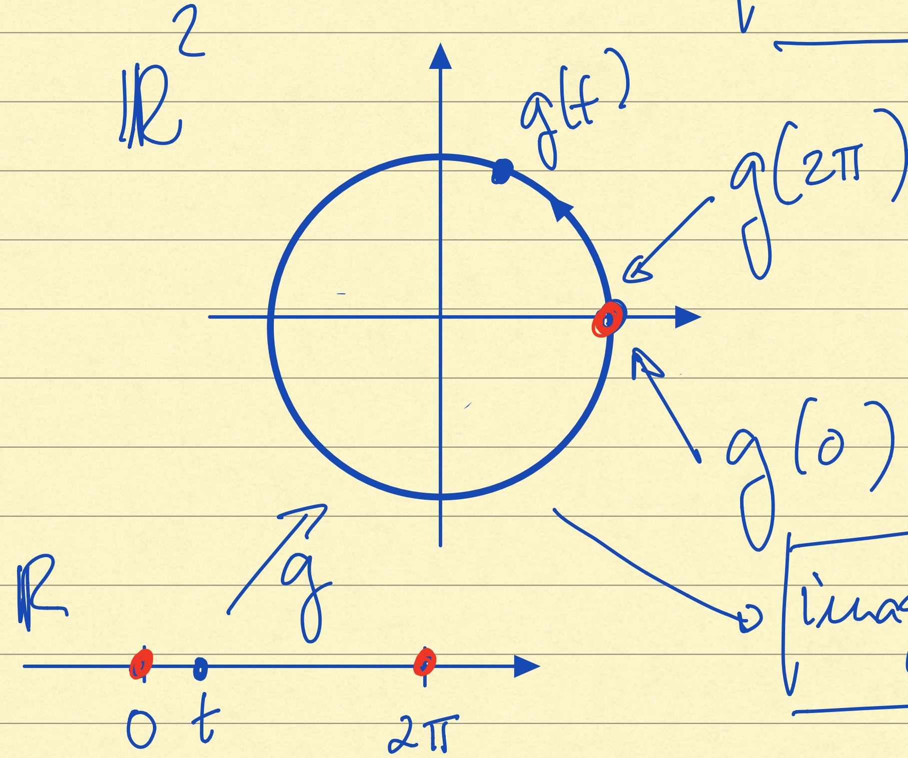


imagem de g